苏州大学
SOOCHOW UNIVERSITY

Chap9 Relation

Jin-Hui Wu

2026-04-17

大纲

- 关系的性质与应用 (9.1-9.2)
- 关系的表示
- 等价关系
- 偏序关系

二元关系

- 二元关系 (binary relation)
  - 从集合A到B的二元关系是$A \times B$的子集
  - 例
    - A是所有学生姓名，B是所有学号，(姓名,学号) 是一种二元关系
    - A={1,2,3,4}，R为A上整除关系，则R={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)}
    - 集合A到集合B的函数

例

- n元集合上有____个不同的关系

  - 从集合A到B的二元关系是$A \times B$的子集

关系的性质

- 自反的 (reflexive)
  - $\forall x[x \in A \to (x, x) \in R]$

  - 例：判断下列$\mathbb{Z}$上的关系是否是自反的
    - $R_1 = \{(a, b) \mid a \le b\}$
    - $R_2 = \{(a, b) \mid a + b \le 3\}$

关系的性质

- 对称的 (symmetric)
  - $\forall x \forall y\, [(x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \in R]$
  - 例：判断下列$\mathbb{Z}$上的关系是否是对称的
    - $R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$
    - $R_2 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

关系的性质

- 反对称的 (antisymmetric)
  - $\forall x \forall y\, [(x,y) \in R \land (y,x) \in R \longrightarrow x = y]$

  - 例：判断下列$\mathbb{Z}$上的关系是否是反对称的
    - $R_1 = \{(a,b) \mid a \le b\}$
    - $R_2 = \{(a,b) \mid a + b \le 3\}$

关系的性质

- 传递的 (transitive)
  - $\forall x \forall y \forall z[(x,y) \in R \wedge (y,z) \in \mathrm{R} \longrightarrow (x,z) \in R\,]$

  - 例：判断下列ℤ上的关系是否是传递的
    - $R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$
    - $R_2 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

关系的组合

- 关系是集合，支持所有集合运算

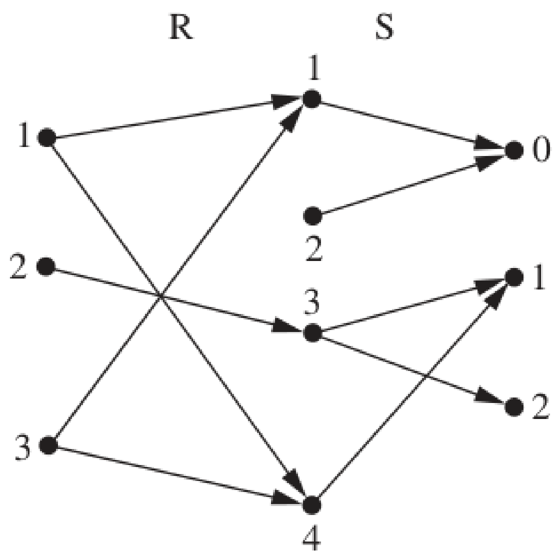
- 例
  - R_1和R_2是定义在{1,2,3}上的关系
    - $R_1 = \{(a,b)|a < b\}$
    - $R_2 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

关系的组合

- 关系是允许多值的函数，支持函数运算

关系的组合

- 计算R和S的复合 (composition)
  - R is the relation from {1, 2, 3} to {1, 2, 3, 4} with
    R = {(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)}
  - S is the relation from {1, 2, 3, 4} to {0, 1, 2} with
    S = {(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}



$1 \to 1 \to 0$	(1, 0)
$1 \to 4 \to 1$	(1, 1)
$2 \to 3 \to 1$	(2, 1)
$2 \to 3 \to 2$	(2, 2)
$3 \to 1 \to 0$	(3, 0)
$3 \to 4 \to 1$	(3, 1)

关系的组合

- 计算R的幂次 (power)
  - R = {(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)}

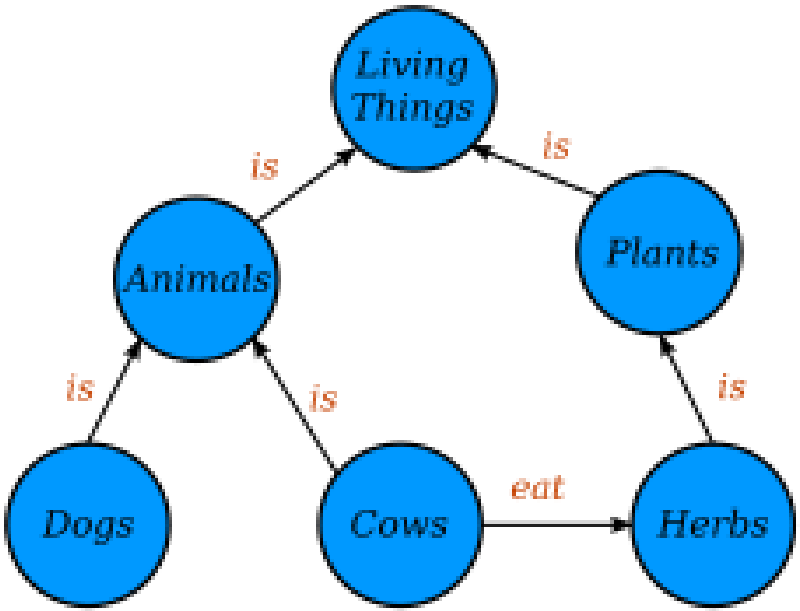
关系的应用

- 数据库 (database)

TABLE 1 Students.			
Student_name	*ID_number*	*Major*	*GPA*
Ackermann	231455	Computer Science	3.88
Adams	888323	Physics	3.45
Chou	102147	Computer Science	3.49
Goodfriend	453876	Mathematics	3.45
Rao	678543	Mathematics	3.90
Stevens	786576	Psychology	2.99

关系的应用

- 知识图谱 (Knowledge Graph)
  - (dogs, is, animals) 且 (animals, is, living things)
  - 从而 (dogs, is, living things)



大纲

- 关系的性质与应用
- 关系的表示 (9.3)
- 等价关系
- 偏序关系

关系的表示

- 矩阵 (matrix)
  - 二元关系来自A×B，A作为行，B作为列
  - 1： $(a,b) \in R$
  - 0： $(a,b) \notin R$

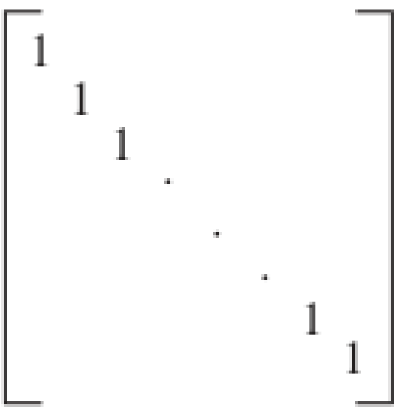
例

- 用矩阵表示下列关系
  - A = {1, 2, 3}，B = {1, 2}
  - $R = \{(a, b) | a \in A, b \in B, a > b\}$

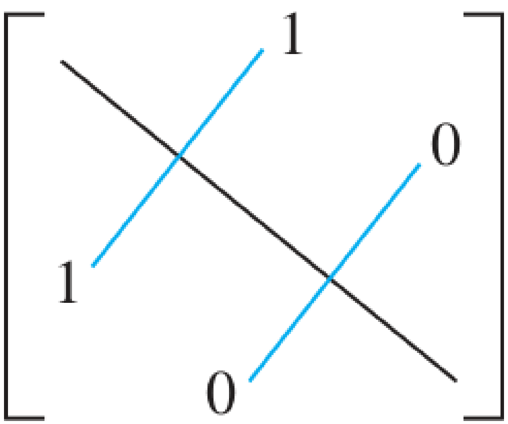
- 二元关系来自A × B，A作为行，B作为列
- 1：$(a, b) \in R$
- 0：$(a, b) \notin R$

关系的表示

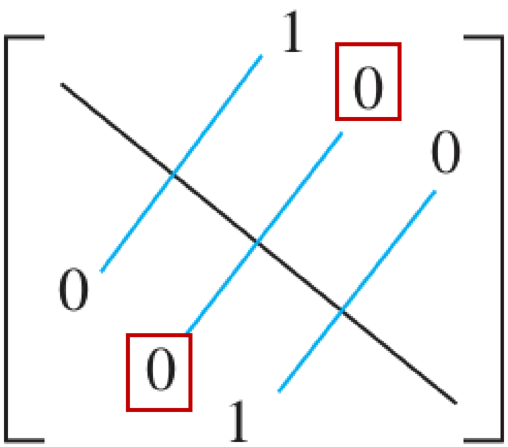
❑ 矩阵表示与关系的性质



自反



对称



反对称

例

- 判断下列关系的性质

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

关系的表示

- 有向图 (digraph, directed graph)
  - 顶点集：$A \cup B$
  - 边集：若(a,b)∈R，则存在有向边(a,b)

例

- 用有向图表示下列关系
  - R为A={a,b,c,d}上的关系
  - (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)

- 顶点集：$A \cup B$
- 边集：若(a,b)∈R，则存在有向边(a,b)

关系的表示

- 有向图表示与关系的性质
  - 自反性：每个顶点都有环 (loop)

关系的表示

- 有向图表示与关系的性质
  - 自反性：每个顶点都有环 (loop)

  - 对称性：不同顶点间不存在单向边

关系的表示

- 有向图表示与关系的性质
  - 自反性：每个顶点都有环 (loop)

  - 对称性：不同顶点间不存在单向边

  - 反对称性：不同顶点间不存在双向边

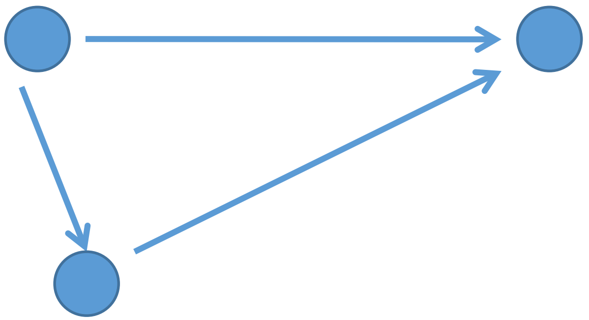
关系的表示

- 有向图表示与关系的性质
  - 自反性：每个顶点都有环 (loop)

  - 对称性：不同顶点间不存在单向边

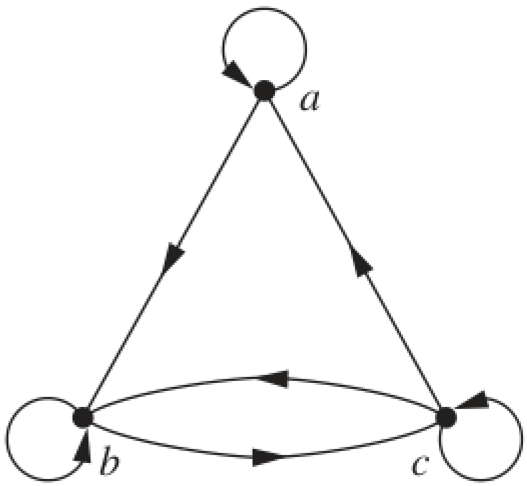
  - 反对称性：不同顶点间不存在双向边

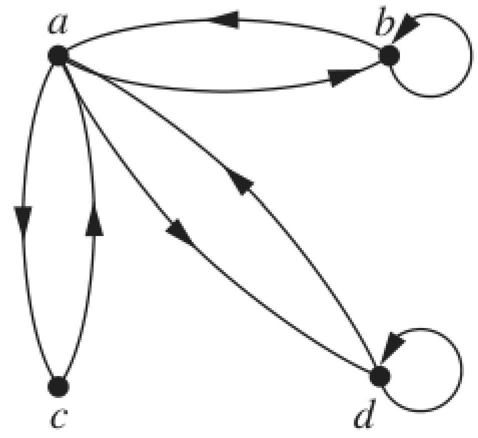
  - 传递性：可到达即可直达



例

- 判断下列关系的性质





大纲

- 关系的性质与应用

- 关系的表示

- 等价关系 (9.5)

- 偏序关系

等价关系

- 等价关系 (equivalent relation)
  - 若定义在集合A上的关系是自反的、对称的和传递的，则称作等价关系

例：字符串长度

- 判断下列关系是否是等价关系
  - R是定义在英文字母组成的字符串的集合上的关系，满足aRb当且仅当$l(a) = l(b)$，其中$l(x)$是字符串x的长度

- 若定义在集合A上的关系是自反的、对称的和传递的，则称作等价关系

例：模m同余

- 判断下列关系是否是等价关系
  - $R=\{(a,b)|a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\}$

- 若定义在集合A上的关系是自反的、对称的和传递的，则称作等价关系

例：整除

- 判断下列关系是否是等价关系
  - 定义在正整数集合上的整除关系

- 若定义在集合A上的关系是自反的、对称的和传递的，则称作等价关系

等价类

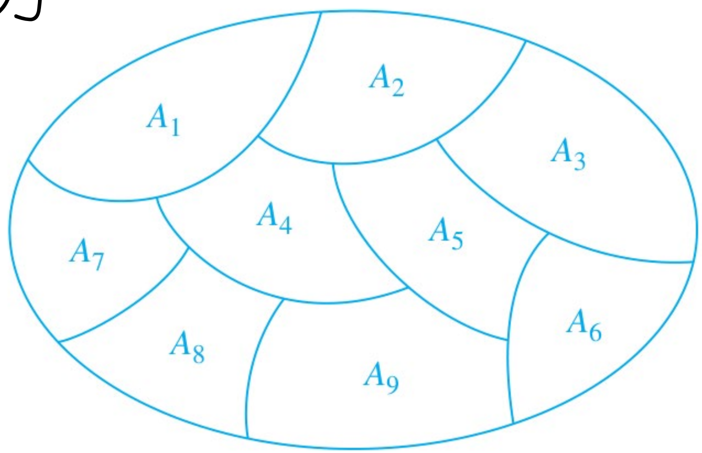
- 等价类 (equivalence class)
  - 设R是集合A上的等价关系，与A中元素a有关系的所有元素的集合叫作a的等价类
  - 记作$[a]_R$

例：模m同余

- 在模4同余关系中，0和1的等价类是什么

等价关系与划分

- 划分 (partition)
  - 若$\{A_i | i \in I\}$满足
    - $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$
    - $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
    - $\cup_{i \in I} A_i = S$
  - 则称$\{A_i | i \in I\}$是S的一个划分



等价关系与划分

- 等价关系与划分一一对应 (Theorem 2, p645)
  - R为S上的等价关系，则R的等价类构成S的划分
  - $\{A_i | i \in I\}$为S的划分，则存在等价关系R，其等价类为$A_i, i \in I$

例

- $S=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x\leq 10\}$，R为模4同余关系，求R的等价类对应的划分

例

- $S=\{x|x\in\mathbb{N}\wedge x\le 10\}$，等价类为
  - {0,2,5,8}
  - {1,3,9}
  - {4,6,7,10}
- 求这些等价类对应的等价关系

大纲

- ❑ 关系的性质与应用
- ❑ 关系的表示
- ❑ 等价关系
- ❑ 偏序关系 (9.6)

偏序关系

- 偏序 (partial ordering)
  - 若定义在集合A上的关系是自反的、反对称的和传递的，则称其是偏序

例：大于等于

- 判断下列关系是否为偏序关系
  - 整数集合上的大于等于关系

例：整除

- 判断下列关系是否为偏序关系
  - 正整数集合上的整除关系

例：包含

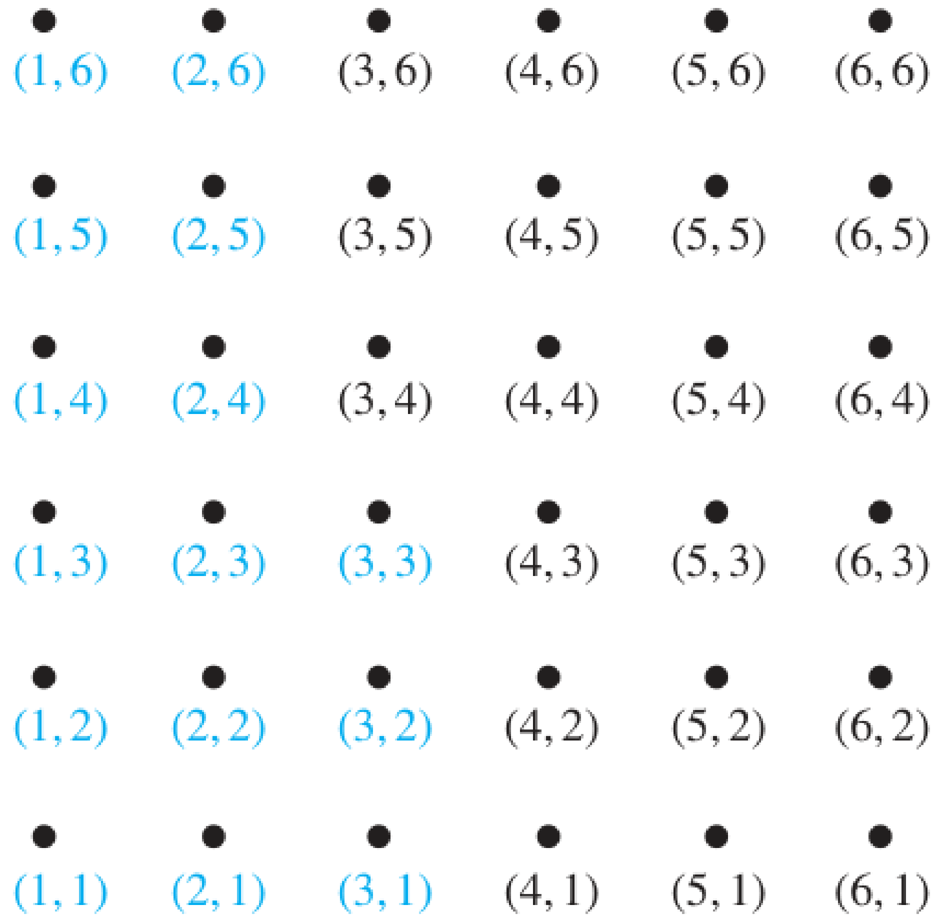
- 判断下列关系是否为偏序关系
  - S的幂集上的包含关系

词典序

- 词典序 (Lexicographic Order)
  - $(A_1, \preccurlyeq_1)$和$(A_2, \preccurlyeq_2)$是两个偏序集，则$A_1 \times A_2$中的词典序规定$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2)$，若下列一个条件满足
    - $a_1 \prec_1 b_1$
    - $a_1 = b_1$且$a_2 \prec_2 b_2$

例

- $(\mathbb{Z}^2, \preccurlyeq)$
  - $\preccurlyeq$为$\mathbb{Z}$上的$\leq$



总结

- 关系的性质
  - 自反、对称、反对称、传递
  - 复合运算
- 关系的表示
  - 矩阵、图
- 等价关系
  - 自反、对称、传递
  - 等价类、划分
- 偏序关系
  - 自反、反对称、传递
  - 词典序